Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiele über Spuren

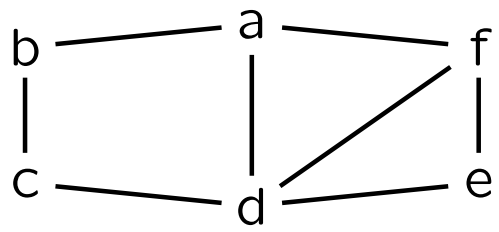
Martin Horsch

14. Juni 2006

Vortragsinhalt

- Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiel mit n Runden und k Marken
- Lokale Temporallogik über Mazurkiewicz-Spuren (LocTL)
- LocTL und die Logik erster Stufe mit zwei Variablen (FO_2)
- Logik erster Stufe mit begrenzter Alternierungstiefe
- Vergleich: zwei Variablen vs. begrenzte Alternierungstiefe

Ein *Abhängigkeitsalphabet* (Σ, D) besteht aus einem endlichen Alphabet Σ und einer reflexiven Abhängigkeitsrelation D über Σ. Man kann (Σ, D) als *Abhängigkeitsgraph* darstellen:



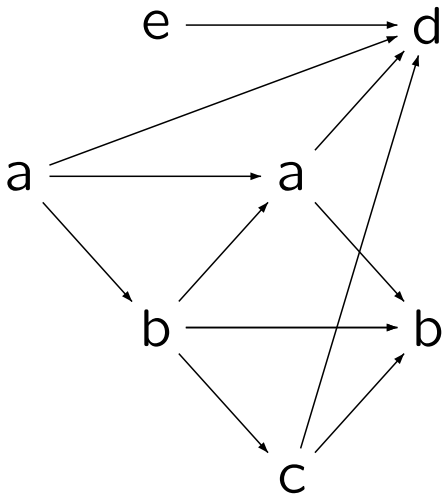
Eine *Mazurkiewicz-Spur* für (Σ, D) ist ein Tupel $t = (V(t), \Lambda, \rightarrow, <)$ mit der Knotenmenge $V(t)$ und der Beschriftung $\Lambda : V(t) \rightarrow \Sigma$.
Die Abhängigkeitsrelation $(\cdot \rightarrow \cdot)$ über $V(t)$ ist azyklisch mit

$$u \rightarrow v \text{ oder } v \rightarrow u \quad \Longleftrightarrow \quad \Lambda(u)\, D\, \Lambda(v) \text{ und } u \neq v$$

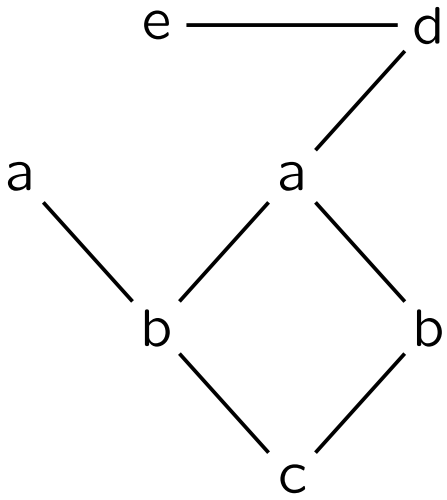
für alle Knoten $u, v \in V(t)$. Die Ordnungsrelation $(\cdot < \cdot)$ ist die transitive Hülle $(\cdot \rightarrow \cdot)^{|\Sigma|}$ der Abhängigkeitsrelation.

graphische Darstellung von Spuren

Bei einer Spur werden wir entweder $(\cdot \rightarrow \cdot)$ oder $(\cdot < \cdot)$ darstellen.



Abhängigkeitsstruktur



Partialordnung (Hasse-Diagramm)

Wir schreiben $t = a_1 a_2 a_3 \cdots$ für Linearisierungen der Beschriftung von t mit $a_i \in \Sigma$. Diese Spur ist $abacbed = aebacbd = eabcadb$.

Die Menge aller Spuren für (Σ, D) bezeichnen wir als $\mathbb{R}[\Sigma, D]$.

In der **Logik erster Stufe** (FO) über Spuren können elementare Variablen x_i mit Knoten belegt werden, aber nicht mit Mengen von Knoten.
Eine Formel mit der Menge freier Variablen X wertet man über Paaren der Art (t, Ξ) mit Belegungen $\Xi : X \to V(t)$ aus.

Wir verwenden:
- boolesche Verknüpfungen und die Quantoren $\exists$ und $\forall$
- einstellige Beschriftungsprädikate λ_a für $a \in \Sigma$
- das zweistellige Prädikat $\to$ in $\mathrm{FO}[\to]$, der Logik erster Stufe über *Spuren als Abhängigkeitsstrukturen*
- das zweistellige Prädikat $<$ in $\mathrm{FO}[<]$, der Logik erster Stufe über *Spuren als Partialordnungen*

Ein Abhängigkeitsalphabet (Σ, D) sei gegeben.
Die geschlossene Formel erster Stufe φ erzeugt die Sprache

$$L(\varphi) = \{t \in \mathbb{R}[\Sigma, D] \mid t \models \varphi\}.$$

Quantortiefe logischer Formeln

Die *Quantortiefe* ergibt sich induktiv nach folgender Regel:

$$
\begin{aligned}
& & \mathrm{qt}(\top) &= 0 \\
\forall\, a \in \Sigma\ \forall\, n \in \mathbb{N}: & & \mathrm{qt}(\lambda_a(x_n)) &= 0 \\
\forall\, i, j \in \mathbb{N}: & & \mathrm{qt}(x_i \to x_j) &= \mathrm{qt}(x_i < x_j) = 0 \\
& & \mathrm{qt}(\neg\, \varphi) &= \mathrm{qt}(\varphi) \\
& & \mathrm{qt}(\ (\varphi \vee \psi)\ ) &= \max(\mathrm{qt}(\varphi), \mathrm{qt}(\psi)) \\
\forall\, n \in \mathbb{N}: & & \mathrm{qt}(\exists x_n\, \varphi) &= 1 + \mathrm{qt}(\varphi)
\end{aligned}
$$

Mit $\mathrm{FO}_k^n[<] \subseteq 2^{\mathbb{R}[\Sigma,D]}$ bezeichnen wir die *endliche* Menge aller Sprachen, die durch Formeln mit k Variablen und der Quantortiefe n erzeugt werden.

Analog: $\mathrm{FO}_k^n[\to]$.

EF-Spiel mit k Marken und n Runden

Das EF-Spiel für $\mathrm{FO}_k^n[<]$ (analog $\mathrm{FO}_k^n[\rightarrow]$) wird von *Spoiler* und *Duplicator* auf zwei Spuren $t_0, t_1 \in \mathbb{R}[\Sigma, D]$ gespielt. Pro Spur gibt jeweils eine mit x_1, x_2, ... und x_k beschriftete Marke.

Anfangs befinden sich alle Marken *außerhalb*. Ablauf einer Runde:

1.) Spoiler wählt eine Seite $\zeta \in \{0, 1\}$. Er setzt eine beliebige Marke auf einen Knoten von t_ζ.
2.) Duplicator setzt die *gleich beschriftete* Marke auf einen Knoten von $t_{1-\zeta}$.

Der Spielstand ist ein Paar von Belegungen (Ξ_0, Ξ_1). Duplicator gewinnt gdw. nach allen k Runden ein $1 \leq i \leq k$ die beiden Belegungen bzgl. der Prädikate $<$ und λ_a mit $a \in \Sigma$ isomorph sind.

Lemma (Immerman & Kozen). Seien $t_0, t_1 \in \mathbb{R}[\Sigma, D]$ Spuren.
Die folgenden Aussagen sind gleichbedeutend:

1. Es gibt eine geschlossene Formel φ mit k Variablen und in der Logik erster Stufe über Partialordnungen, sodass gilt:

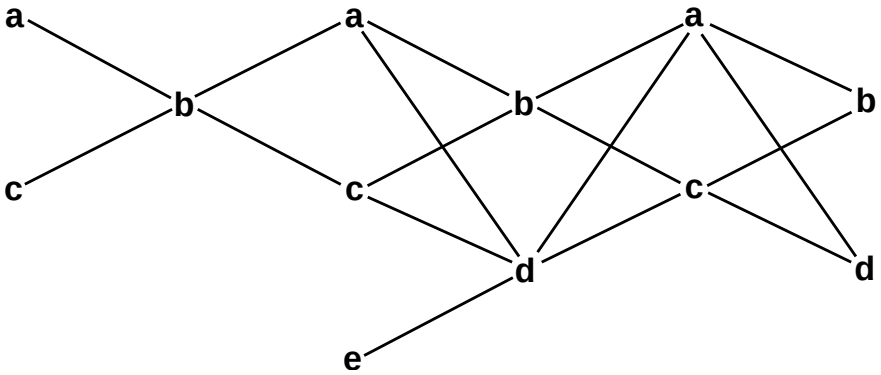
$$t_0 \models \varphi, \quad t_1 \not\models \varphi \quad \text{und} \quad qt(\varphi) = n$$

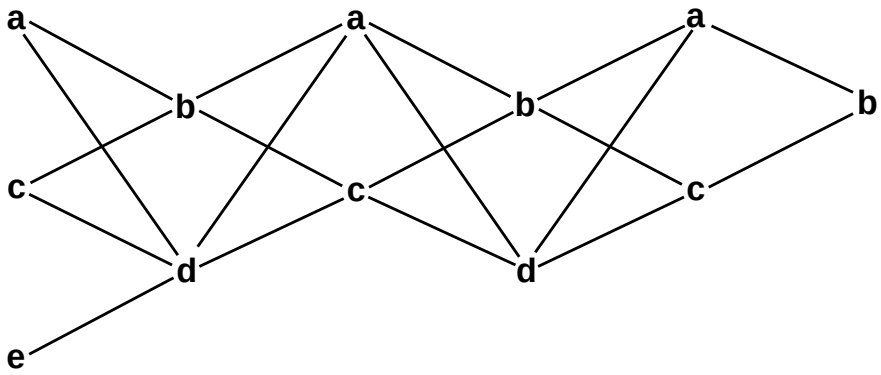
2. Spoiler besitzt eine Gewinnstrategie im EF-Spiel für $FO_k^n[<]$ auf den Spuren t_0 und t_1, er gewinnt also mit k Marken innerhalb von n Runden.

Beweis: Induktion über n.

Analog: Formeln mit dem Prädikat $(\cdot \rightarrow \cdot)$

EF-Spiel mit zwei Marken und zwei Runden





Spoiler besitzt eine Gewinnstrategie.

Nur die linke Spur erfüllt die Formel

$$\exists x\,(\lambda_d \ \wedge \ \neg\exists y\,(\lambda_a \ \wedge \ x < y)).$$

lokale Temporallogik

Formeln der lokalen Temporallogik für Spuren (LocTL) werden über einzelnen Knoten ausgewertet. Sei $t \in \mathbb{R}[\Sigma, D]$ eine Spur und $v \in V(t)$ ein Knoten. Mit $a \in \Sigma$ gilt

$$(t, v) \models \lambda_a \quad \Longleftrightarrow \quad \Lambda(v) = a$$

Einige ihrer Operatoren sind
next-future, *yesterday-past* und *parallel*:

$$\begin{aligned}
(t, v) &\models \mathsf{XF}\,\varphi \quad &\Longleftrightarrow \quad &\exists v' > v:\ (t, v') \models \varphi \\
(t, v) &\models \mathsf{YP}\,\varphi \quad &\Longleftrightarrow \quad &\exists v' < v:\ (t, v') \models \varphi \\
(t, v) &\models \mathsf{PAR}\,\varphi \quad &\Longleftrightarrow \quad &\exists v' \parallel v:\ (t, v') \models \varphi
\end{aligned}$$

Dabei ist $\parallel$ die Parallelitätsrelation:

$$\forall u, v \in V(t): \quad u \parallel v \quad \Longleftrightarrow \quad \neg\,(u = v \ \vee \ u < v \ \vee \ u > v)$$

tiefenbeschränkte Fragmente von LocTL

Sei $\mathrm{Op} \in \{\mathrm{XF}, \mathrm{YP}, \mathrm{PAR}\}$, dann definieren wir

$$\forall t \in \mathbb{R}[\Sigma, D] : \quad t \models \mathrm{Op}\,\varphi \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \nu \in V(t) : \ (t, \nu) \models \varphi$$

für eine temporallogische Formel φ. Die Auswertung einer Formel beginnt *außerhalb* der Spur, mit dem äußersten Operator springt man hinein.

Die von φ erzeugte Sprache ist $L(\varphi) = \{t \in \mathbb{R}[\Sigma, D] \mid t \models \varphi\}$.

Die *Operatortiefe* einer temporallogischen Formel ist die maximale Anzahl miteinander verschachtelter Operatoren.
Die *endliche* Menge aller Sprachen, die mit XF, YP und PAR bei einer Operatortiefe von $n \in \mathbf{N}$ oder weniger erzeugt werden können, ist $\mathrm{LocTL}^n[\mathrm{XF}, \mathrm{YP}, \mathrm{PAR}]$.

Im EF-Spiel für $\mathrm{LocTL}[\mathrm{XF}, \mathrm{YP}, \mathrm{PAR}]$ auf den Spuren t_0 und t_1 gibt es eine Marke pro Spur. Anfangs liegen die Marken *außerhalb*.

In jeder Runde wählt Spoiler eine Seite $\zeta \in \{0, 1\}$. Angenommen, die Marken liegen auf $v_0 \in V(t_0)$ und $v_1 \in V(t_1)$. Dann kann Spoiler zwischen den folgenden Spielzügen wählen:

XF: Spoiler zieht auf $v'_\zeta > v_\zeta$. Duplicator zieht auf $v'_{1-\zeta} > v_{1-\zeta}$.

YP: Spoiler zieht auf $v'_\zeta < v_\zeta$. Duplicator zieht auf $v'_{1-\zeta} < v_{1-\zeta}$.

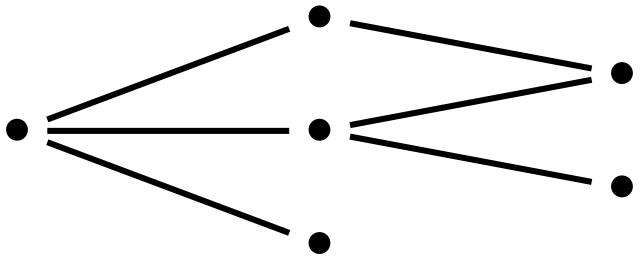
PAR: Spoiler zieht auf $v'_\zeta \parallel v_\zeta$. Duplicator zieht auf $v'_{1-\zeta} \parallel v_{1-\zeta}$.

Wenn die Marken außerhalb liegen, ziehen beide Spieler auf beliebige Knoten. Spoiler gewinnt, sobald die Marken auf verschieden beschrifteten Knoten liegen.

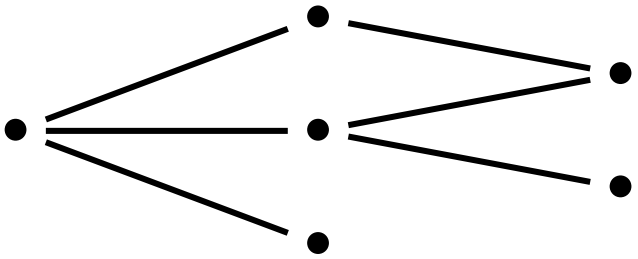
Lemma. Spoiler besitzt eine Gewinnstrategie für n Runden gdw. t_0 und t_1 in $\mathrm{LocTL}^n[\mathrm{XF}, \mathrm{YP}, \mathrm{PAR}]$ unterscheidbar sind.

Satz. Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $\mathrm{FO}_2^n[<] = \mathrm{LocTL}^n[\mathrm{XF}, \mathrm{YP}, \mathrm{PAR}]$.

Beweis (Äquivalenz der Spiele).



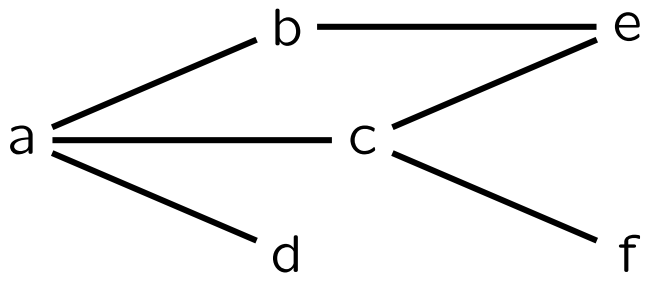
temporal

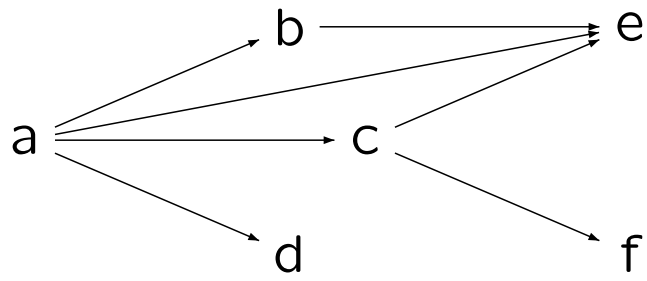


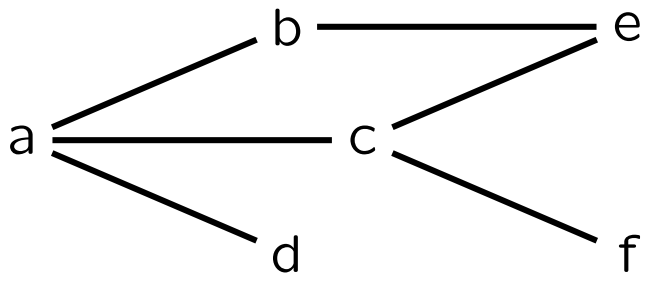
erster Stufe

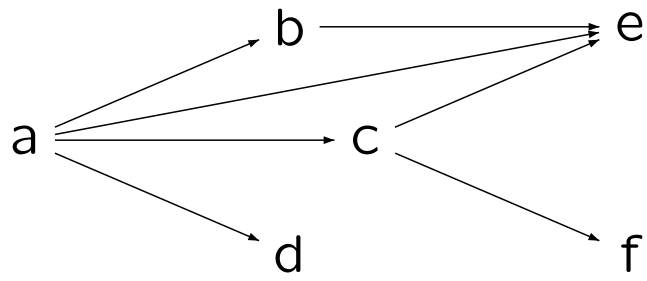
Satz. Es gilt $\mathrm{FO}_2[\rightarrow] = \mathrm{LocTL}[\mathrm{XF}, \mathrm{YP}]$.

Beweis (Äquivalenz der Spiele).









temporal

erster Stufe

(Es gilt: $u \rightarrow v$ oder $v \rightarrow u \iff \Lambda(u)\, \mathrm{D}\, \Lambda(v)$ und $u \neq v$)

Formeln mit begrenzter Alternierungstiefe

Die Formelmenge $\Phi_{\Sigma,<}(0,0)$ besteht aus den Formeln der Logik erster Stufe über Partialordnungen *ohne gebundene Variablen*.
Für $k, n \geq 1$ liegt φ mit den freien Variablen $x_1, \ldots, x_l$ genau dann in $\Phi_{\Sigma,<}(k,n)$, wenn es die Form

$$\varphi \quad = \quad \bigvee_{1 \leq i \leq j} (\exists x_{l+1} \cdots \exists x_{l+m_i} \neg \psi_i)$$

mit $m_i \leq n$ und $\psi_i \in \Phi_{\Sigma,<}(k-1, n-m_i)$ für alle $1 \leq i \leq j$ hat.
Wir bezeichnen k als die *Alternierungstiefe* $(\exists, \forall, \exists, \ldots)$ der Formeln.

$$\begin{array}{lcl}
\Sigma_k^n[<] & = & \{L(\varphi) \mid \ \varphi \in \Phi_{\Sigma,<}(k,n)\} \\
\Sigma_k[<] & = & \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Sigma_k^n[<] \\
\Delta_k[<] & = & \Sigma_k[<] \cap \mathrm{Co}\Sigma_k[<] \quad = \quad \Sigma_k[<] \cap \Pi_k[<]
\end{array}$$

EF-Spiel mit k Seitenwechseln und n Marken

Spoiler und Duplicator spielen auf zwei Spuren $t_0, t_1 \in \mathbb{R}[\Sigma, D]$. Ein Spielstand hat die Form (Ξ_0, Ξ_1, ζ) mit $\zeta \in \{0, 1\}$ und Belegungen Ξ_0 und Ξ_1 der Variablen $x_1, \ldots x_m$ mit $m \leq n$.

Ablauf einer Runde:
1.) Spoiler nimmt sich $l \leq n - m$ Marken, die mit $x_{m+1}, \ldots, x_{m+l}$ beschriftet sind. Er verteilt sie auf Knoten von t_ζ.
2.) Duplicator setzt genauso beschriftete Marken auf $t_{1-\zeta}$.

So entstehen die erweiterten Belegungen Ξ'_0 und Ξ'_1.
Seitenwechsel: der neue Spielstand ist $(\Xi'_0, \Xi'_1, 1 - \zeta)$.

Es werden k Runden gespielt. Duplicator gewinnt, wenn die Belegungen am Ende isomorph sind.

Genau dann, wenn ausgehend vom Spielstand $(\Xi_0, \Xi_1, 0)$ bei k verbleibenden Runden *Duplicator* eine Gewinnstrategie besitzt, schreiben wir

$$t_0, \Xi_0 \;\preceq_k^n\; t_1, \Xi_1 \quad (\Xi_1 \text{ dupliziert } \Xi_0).$$

Lemma. Die Behauptung

$$\forall \varphi \in \Phi_{\Sigma,<}(k, n): \quad t_0, \Xi_0 \models \varphi \;\Rightarrow\; t_1, \Xi_1$$

ist genau dann erfüllt, wenn $t_0, \Xi_0 \;\preceq_k^n\; t_1, \Xi_1$ gilt.

Beweis (Induktion über k).

Ist ε die leere Belegung, dann hat Duplicator auf den Spuren t_0 und t_1 genau dann eine Gewinnstrategie ausgehend von $(\varepsilon, \varepsilon, 0)$, wenn t_1 *mindestens die gleichen* Eigenschaften aus $\Sigma_k^n[<]$ erfüllt wie t_0.

Wir nennen dieses Spiel deshalb das EF-Spiel für $\Sigma_k^n[<]$.

zwei Variablen vs. begrenzte Alternierungstiefe

Über Wörtern gilt

$$\mathrm{FO}_2[<] \;=\; \Delta_2[<] \;=\; \mathit{DA} \quad \text{(Tesson \& Thérien).}$$

Über Spuren *als Abhängigkeitsstrukturen* gilt

$$\mathrm{FO}_2[\rightarrow] \;=\; \Delta_2[\rightarrow] \;=\; \mathit{DA} \quad \text{(Kufleitner).}$$

Behauptung.
Sei $k > 1$. Dann sind $\mathrm{FO}_2[<]$ und $\Delta_k[<]$ über Spuren unvergleichbar.

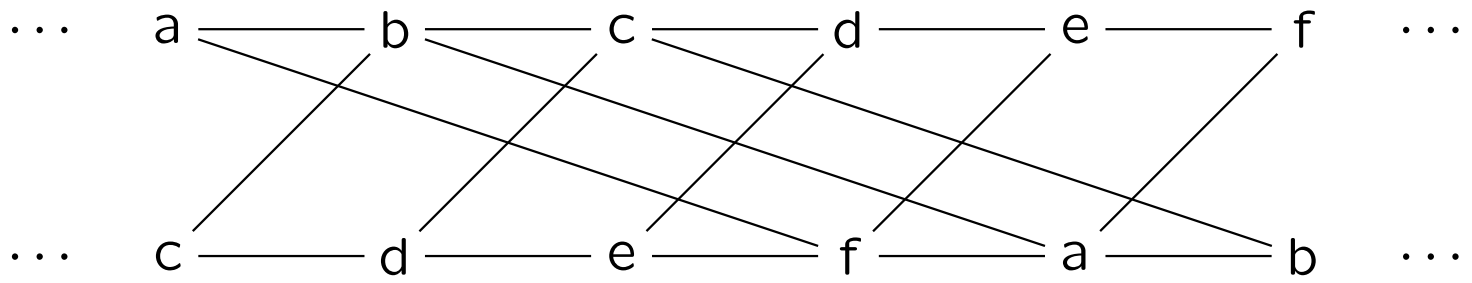
Lemma. Es gibt ein Abhängigkeitsalphabet (Σ, D) mit

$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad \Sigma_1^3[<] \setminus \mathsf{LocTL}^n[\mathsf{XF}, \mathsf{YP}, \mathsf{PAR}] \neq \emptyset.$$

Beweis (EF-Spiele für diese Fragmente).

Durch $a-b-c-d-e-f-a$ ist ein zyklisches Abhängigkeitsalphabet gegeben, außerdem sei der Separator $\#$ von allen Zeichen abhängig.

Sei $q = acbedf$, und p bestehe aus $2n+1$ Blöcken der Art:

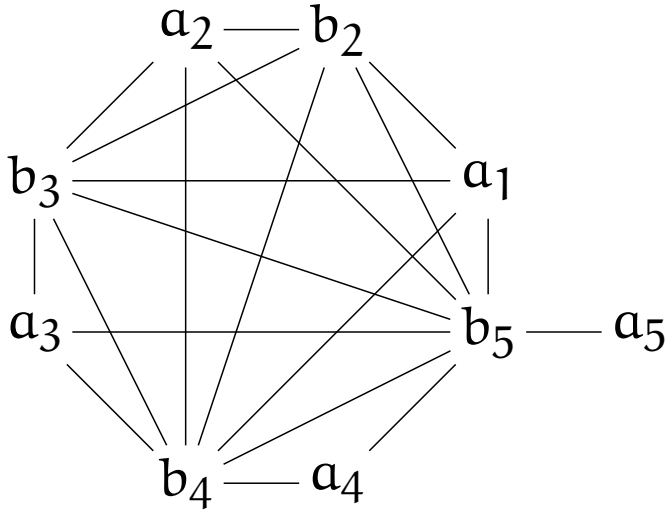


Betrachten wir die folgenden Spuren:

$$s = (\#p)^n \#q(\#p)^n \# \quad \text{und} \quad t = (\#p)^{2n+1} \#$$

Lemma. Sei $k \geq 1$. Es gibt ein Abhängigkeitsalphabet (Σ, D), sodass ein $L \in \mathrm{LocTL}^k[\mathrm{PAR}]$ mit der Eigenschaft $L \notin \Sigma_k^n[<]$ für alle $n \in \mathbb{N}$ existiert.

Beweis (EF-Spiele für diese Fragmente).



Aufbau eines Abhängigkeitsalphabets:
a_m mit $m \geq 1$ ist *unabhängig* von allen a_i und b_i mit $i < m$.
b_m mit $m > 1$ ist *abhängig* von allen a_i und b_i mit $i \leq m$.

Sei $l \geq (n+1)^k$. Betrachten wir die Spuren $\Upsilon_{1,l} = a_1$, $\Theta_{1,l} = \varepsilon$ und

$$\begin{aligned} \Upsilon_{j,l} &= (b_j a_j \Upsilon_{j-1,l})^l \cdot b_j a_j \Theta_{j-1,l} \cdot (b_j a_j \Upsilon_{j-1,l})^l \\ \Theta_{j,l} &= (b_j a_j \Upsilon_{j-1,l})^l \end{aligned}$$

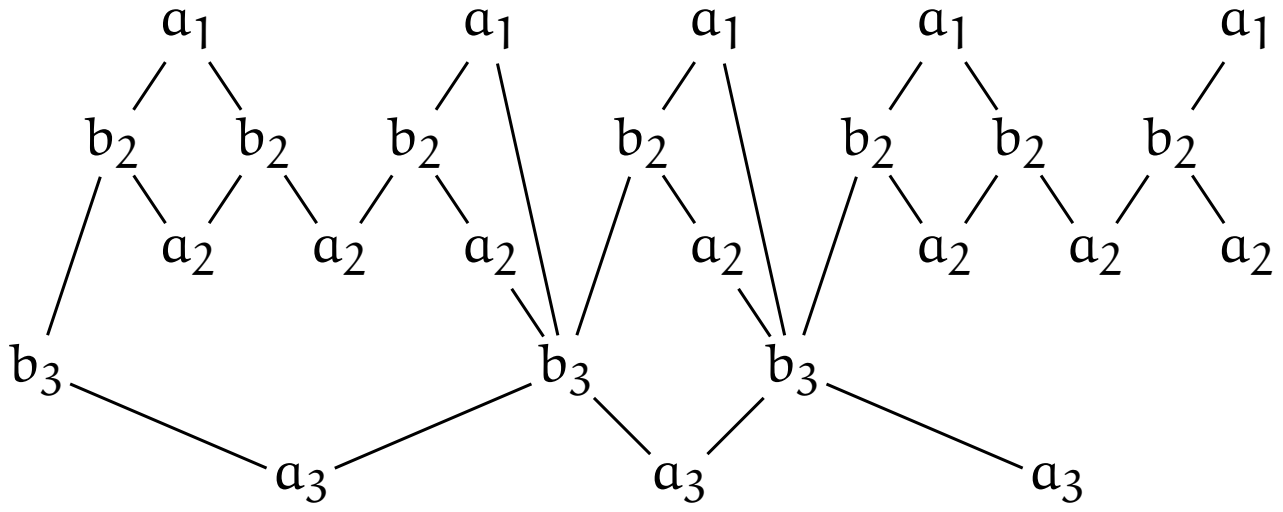
für alle $i > 1$. Induktiv gilt

$$\Theta_{k,l} \preceq_k^n \Upsilon_{k,l}.$$

Man kann diese Spuren aber mit einer von l unabhängigen Formel unterscheiden, die k PAR-Operatoren enthält.

Beispiel:

$\Upsilon_{3,1} =$



zwei Variablen vs. begrenzte Alternierungstiefe

Sei $k > 1$. Nach Definition ist $\mathrm{Co}\Sigma_{k-1}[<]$ eine Teilmenge von $\Sigma_k[<]$. Folglich ist $\Sigma_{k-1}[<]$ eine Teilmenge von $\Pi_k[<] = \mathrm{Co}\Sigma_k[<]$ und es gilt

$$\Sigma_{k-1}[<] \quad \subseteq \quad \Sigma_k[<] \cap \Pi_k[<] \quad = \quad \Delta_k[<].$$

Es gibt Abhängigkeitsalphabete (Σ, D) mit folgenden Eigenschaften für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{array}{rcccl} \Sigma_1^3[<] & \subset & \Delta_k[<] & \not\subseteq & \mathrm{FO}_2^n[<] = \mathrm{LocTL}^n[\mathrm{XF}, \mathrm{YP}, \mathrm{PAR}] \\ \mathrm{LocTL}^k[\mathrm{PAR}] & \subset & \mathrm{FO}_2[<] & \not\subseteq & \Delta_k[<] \subset \Sigma_k^n[<] \end{array}$$

Also sind $\mathrm{FO}_2[<]$ und $\Delta_k[<]$ über Spuren unvergleichbar.