Spiele und logische Komplexitätsklassen

Martin Horsch

26. Januar 2006

Inhalt des Seminarvortrages

- Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiel mit k Marken
- Formeln mit k Variablen und logische Komplexitätsklassen
- k-Variableneigenschaft logischer Theorien
- die Theorie linearer Ordnungen erfüllt die 3-Variableneigenschaft
- ein temporales Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiel

beschriftete Partialordnung (PO)

Eine *beschriftete Partialordnung* $p = (V, \leq, \lambda)$ besteht aus einer Knotenmenge V mit einer Beschriftungsfunktion $\lambda : V \to \Sigma$ für ein endliches Alphabet Σ und einer reflexiven, transitiven und antisymmetrischen Ordnungsrelation $(\leq) \subseteq V^2$.

Darstellung paralleler Knoten:

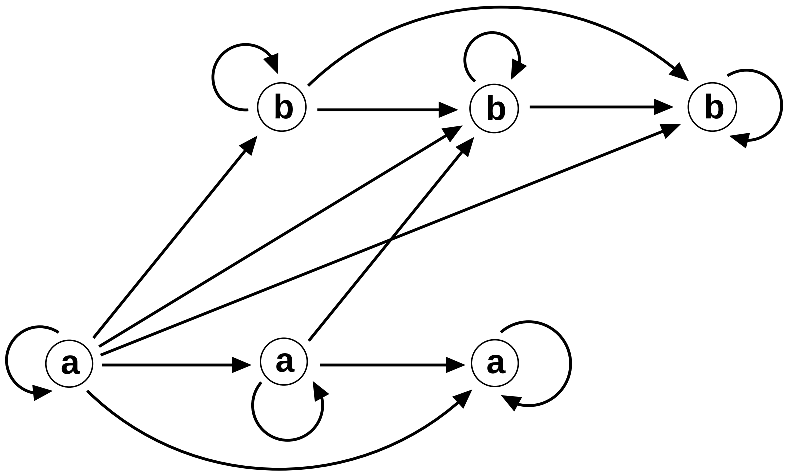
$$\neg\left((u \leq v) \vee (v \leq u)\right) \quad \Longleftrightarrow \quad (u \parallel v)$$

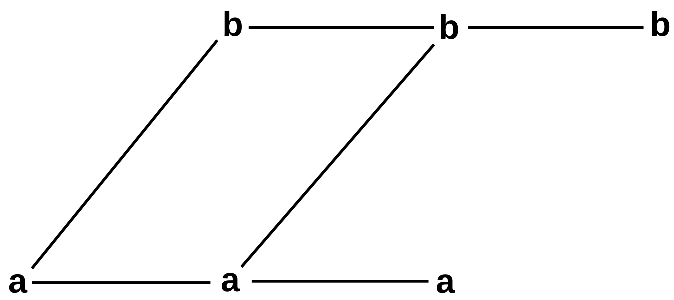
Ein Knoten $\perp \in V$ ist *minimal* gdw. $\perp \leq v$ für alle $v \in V$ gilt.

Die Partialordnung $p = (V, \leq, \lambda)$ ist *linear*.
gdw.
Es gibt keine Knoten $u, v \in V$ mit $u \parallel v$.

Darstellung einer PO als Graph

Eine PO $p = (V, \leq, \lambda)$ kann als Graph interpretiert werden.





Im Hasse-Diagramm $H(p) = (V, \frown, \lambda)$ werden alle Schleifen und redundante Kanten entfernt.

$$\forall u, v \in V: \quad u \frown v \quad \Longleftrightarrow \quad (u < v) \;\wedge\; \neg\exists \chi \in V: \; u < \chi < v$$

Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiel mit k Marken und n Runden

Ein EF-Spiel wird von den Spielern *Spoiler* und *Duplicator* auf zwei Partialordnungen $p_0 = (V_0, \leq, \lambda)$ und $p_1 = (V_1, \leq, \lambda)$ gespielt. Für p_0 und p_1 gibt es je eine mit $x_1, x_2, \ldots$ und x_k beschriftete Marke. Jede Marke liegt auf einem Knoten von p_0 bzw. p_1 oder *außerhalb*, auf $\perp_i \notin V_i$. Anfangs liegen alle Marken außerhalb.

Ablauf einer Spielrunde:

1. Spoiler wählt eine Seite $s \in \{0, 1\}$.

2. Spoiler verschiebt eine der Marken, die auf p_s liegen.

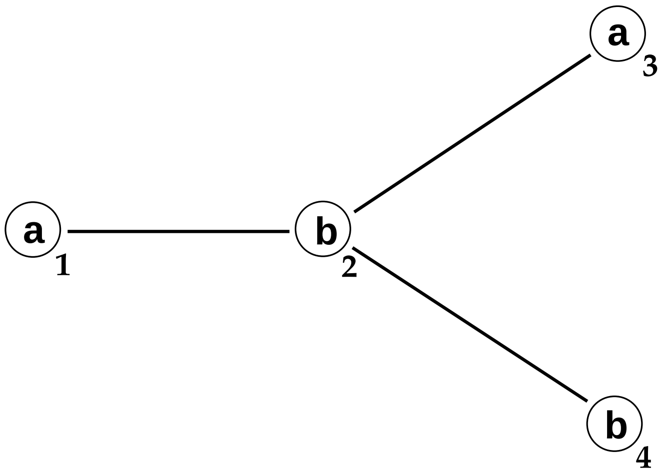
3. Duplicator *kann* die *gleich beschriftete* Marke auf p_{1-s} verschieben.

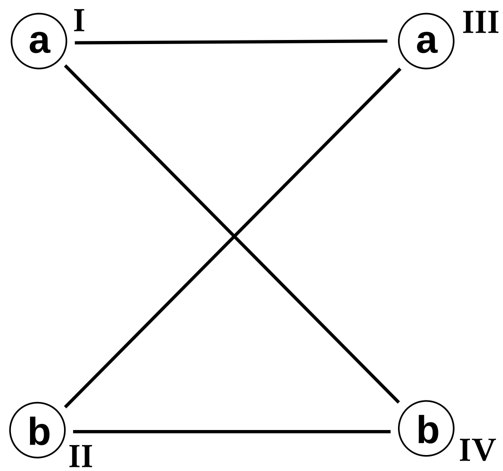
Spoiler gewinnt gdw. nach einer der Runden:

- gleichartige Marken auf verschieden beschrifteten Knoten liegen, oder ...

- ... für $1 \leq i, j \leq k$ auf p_0 die i-Marke an einer kleineren (gleichen, größeren) Position als die j-Marke liegt, auf p_1 aber nicht.

EF-Spiel mit zwei Marken und zwei Runden





Spoiler hat eine Gewinnstrategie:

$\rightarrow$ lege die mit x beschriftete Marke auf Knoten 1.
$\rightarrow$ Duplicator muss jetzt auf I oder III setzen.
$\rightarrow$ lege die mit y beschriftete Marke auf Knoten II bzw. IV.
$\rightarrow$ Duplicator verliert mit jeder möglichen Antwort.

Notation zum Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiel

Verteilung von k Marken auf $p = (V_p, \leq, \lambda)$ und $q = (V_q, \leq, \lambda)$ entspricht *Belegungen* $\mathfrak{A}_p : X \to V_p$ und $\mathfrak{A}_q : X \to V_q$ mit $X \subset \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ und $|X| = k$. Die Knoten von p und q, auf denen eine Marke liegt, sind gegeben durch $\mathfrak{I}\mathfrak{A}_p$ und $\mathfrak{I}\mathfrak{A}_q$.

Die Abbildung

$$\mu \;=\; \mu(\mathfrak{A}_p, \mathfrak{A}_q) : \;\; \mathfrak{I}\mathfrak{A}_p \to \mathfrak{I}\mathfrak{A}_q, \;\; \mathfrak{A}_p(x_i) \mapsto \mathfrak{A}_q(x_i) \quad \forall\, 1 \leq i \leq k$$

ist ein *lokaler Isomorphismus* von V_p nach V_q gdw.:

$$\forall\, u, v \in \mathfrak{I}\mathfrak{A}_p : \quad (\lambda(v) \;=\; \lambda \circ \mu(v)) \quad \wedge \quad ((u \leq v) \iff (\mu(u) \leq \mu(v)))$$

Duplicator gewinnt das EF-Spiel auf p und q gdw. nach jeder Runde $\mu(\mathfrak{A}_p, \mathfrak{A}_q)$ ein lokaler Isomorphismus ist.

Restriktion von Belegungen

Ähnlichkeit von Belegungen. Wir schreiben:

$$(p, \mathfrak{A}_p) \quad \sim_{(k,n)} \quad (q, \mathfrak{A}_q)$$

gdw. Duplicator im Spiel mit k Marken über p und q ausgehend von den Belegungen $\mathfrak{A}_p$ und $\mathfrak{A}_q$ bei n verbleibenden Runden eine Gewinnstrategie hat.

Eine ℓ-Restriktion der Belegung $\mathfrak{A} : X \to V$ ist eine Belegung $\mathfrak{A}' : X' \to V$ mit $X' \subseteq X$ und $|X'| \leq \ell \in \mathbb{N}$, wobei $\mathfrak{A}(x_i) = \mathfrak{A}'(x_i)$ für alle $x_i \in X'$ gilt.

Feststellung. Für beliebige Restriktionen $\mathfrak{A}'_p : X' \to V_p$ und $\mathfrak{A}'_q : X' \to V_q$ der Belegungen $\mathfrak{A}_p : X \to V_p$ und $\mathfrak{A}_q : X \to V_q$ gilt:

$$(p, \mathfrak{A}_p) \ \sim_{(k,n)} \ (q, \mathfrak{A}_q) \quad \Longrightarrow \quad (p, \mathfrak{A}'_p) \ \sim_{(k,n)} \ (q, \mathfrak{A}'_q)$$

Logik erster Stufe für Partialordnungen

Sei $p = (V_p, \leq, \lambda)$ eine Partialordnung und $\mathfrak{A} : X \to V_p$ eine Belegung mit $X \subseteq \{x_1, \ldots, x_k\}$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Logische Formeln I. Stufe (FO) ohne Funktionssymbole, mit dem zweistelligen Prädikat $\leq$ und den einstelligen Prädikaten λ_a zur Abfrage von Symbolen $a \in \Sigma$ sind:

$$
\begin{array}{rcl}
(p, \mathfrak{A}) \models \top & & \\
(p, \mathfrak{A}) \models \lambda_a(x_j) & \iff & x_j \in X \;\text{ und }\; \lambda \circ \mathfrak{A}(x_j) = a \\
(p, \mathfrak{A}) \models x_\ell \leq x_m & \iff & \{x_\ell, x_m\} \subseteq X \;\text{ und }\; \mathfrak{A}(x_\ell) \leq \mathfrak{A}(x_m) \\
(p, \mathfrak{A}) \models \neg\, \varphi & \iff & (p, \mathfrak{A}) \not\models \varphi \\
(p, \mathfrak{A}) \models (\varphi \vee \psi) & \iff & (p, \mathfrak{A}) \models \varphi \;\text{ oder }\; (p, \mathfrak{A}) \models \psi \\
 & & \\
(p, \mathfrak{A}) \models \exists\, x_j\, \varphi & \iff & 1 \leq j \leq k \\
 & & \quad \text{und }\; \exists\, v \in V_p : \; (p, \mathfrak{A}[x_j \mapsto v]) \models \varphi \\
 & & \\
p \models \varphi & \iff & (p, (\emptyset \to V_p)) \models \varphi
\end{array}
$$

Menge *freier* Variablen von φ: $\mathcal{F}(\varphi)$
Menge *gebundener* Variablen von φ: $\beta(\varphi)$

$$\mathrm{var}(\varphi) \quad = \quad \mathcal{F}(\varphi) \,\dot\cup\, \beta(\varphi)$$

Die Formel φ kann genau dann für eine Belegung $\mathfrak{A} : X \to V$ ausgewertet werden, wenn $\mathcal{F}(\varphi)$ eine Teilmenge von X ist.

Die *Quantortiefe* einer Formel ist induktiv gegeben:

$$\begin{array}{rrcl}
 & \mathrm{qt}(\top) & = & 0 \\
\forall\, a \in \Sigma\ \forall\, n \in \mathbb{N}: & \mathrm{qt}(\lambda_a(x_n)) & = & 0 \\
\forall\, i, j \in \mathbb{N}: & \mathrm{qt}(x_i \leq x_j) & = & 0 \\
 & \mathrm{qt}(\neg\, \varphi) & = & \mathrm{qt}(\varphi) \\
 & \mathrm{qt}(\ (\varphi \vee \psi)\ ) & = & \max(\mathrm{qt}(\varphi), \mathrm{qt}(\psi)) \\
\forall\, n \in \mathbb{N}: & \mathrm{qt}(\exists x_n\, \varphi) & = & 1 + \mathrm{qt}(\varphi)
\end{array}$$

logische Komplexitätsklassen

$$\begin{array}{rl} \text{Menge aller Partialordnungen:} & \mathsf{PO} \\ \text{Semantik einer Formel } \varphi \text{ mit } \mathcal{F}(\varphi) = \emptyset\text{:} & L(\varphi) = \{p \in \mathsf{PO} \mid p \models \varphi\} \end{array}$$

Die Semantik $L(\varphi) \in 2^{\mathsf{PO}}$ nennen wir auch eine *logische Eigenschaft* von Partialordnungen. Logische Komplexitätsklassen $\mathfrak{F} \subseteq 2^{\mathsf{PO}}$ sind Mengen logischer Eigenschaften.

$$\mathrm{FO}[\leq] \quad = \quad \{\, L(\varphi) \,\} \;\subset\; 2^{\mathsf{PO}}$$

$$\forall\, k \in \mathbb{N}: \quad \mathrm{FO}_k[\leq] \quad = \quad \{\, L(\varphi) \mid \mathrm{var}(\varphi) = \beta(\varphi) \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}\}$$

$$\forall\, k, n \in \mathbb{N}: \quad \mathrm{FO}_{(k,n)}[\leq] \quad = \quad \{\, L(\varphi) \mid \mathrm{qt}(\varphi) \leq k \;\wedge\; \beta(\varphi) \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}\}$$

Lemma.
Die Fragmente $\mathrm{FO}_{(k,n)}[\leq] \subset 2^{\mathsf{PO}}$ mit $k, n \in \mathbb{N}$ sind endlich.

Beweis.
Induktionsanfang: es gilt $\mathrm{FO}_{(k,0)}[\leq] = \mathrm{FO}_{(0,0)}[\leq] = \{\emptyset, 2^{\mathsf{PO}}\}$.
Das Lemma gelte für $\mathrm{FO}_{(k,n)}[\leq]$.

Alle Eigenschaften aus $\mathrm{FO}_{(k,\,n+1)}[\leq]$ können als Formeln φ mit

$$\varphi \quad = \quad \exists\, x_i\, \psi \quad \mathrm{mit} \quad 1 \leq i \leq k$$

oder als boolesche Verknüpfungen solcher Formeln angegeben werden, wobei ψ eine Formel mit höchstens k Variablen und einer Quantortiefe $\mathrm{qt}(\psi) \leq n$ ist. Es gibt aber nur endlich viele semantisch verschiedene ψ. $\square$

logische Fragmente und EF-Spiele

Äquivalenz von Belegungen.
Seien $k, n \in \mathbb{N}$, $p = (V_p, \leq, \lambda)$ und $q = (V_q, \leq, \lambda)$ Partialordnungen und $\mathfrak{A}_p : \{x_1, \ldots, x_k\} \to V_p$, $\mathfrak{A}_q : \{x_1, \ldots, x_k\} \to V_q$ Belegungen. Dann soll gelten:

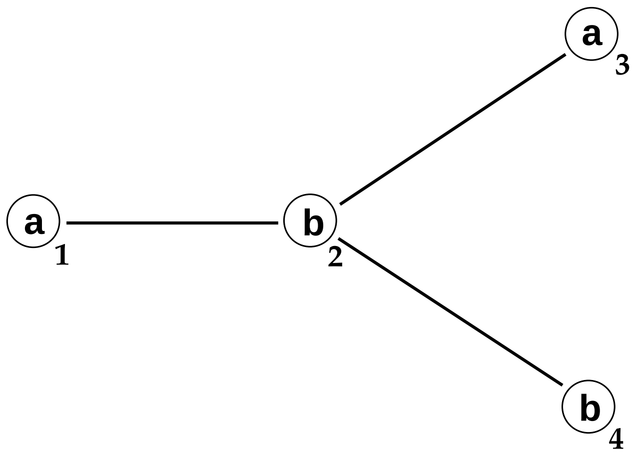
$$(p, \mathfrak{A}_p) \equiv_{(k,n)} (q, \mathfrak{A}_q) \iff \forall L \in FO_{(k,n)}[\leq] : (p \in L \Leftrightarrow q \in L)$$

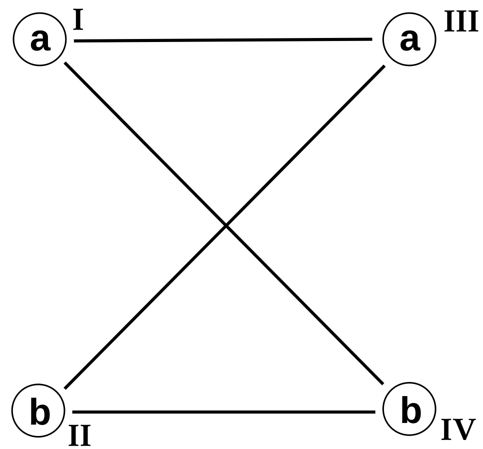
Satz (Immerman & Kozen).

$$(p, \mathfrak{A}_p) \equiv_{(k,n)} (q, \mathfrak{A}_q) \iff (p, \mathfrak{A}_p) \sim_{(k,n)} (q, \mathfrak{A}_q)$$

Beispiel

Aus der Gewinnstrategie von Spoiler (2 Marken, 2 Runden) ergibt sich eine Formel mit zwei Variablen und Quantortiefe ≤ 2.





Die Formel

$$\varphi \quad = \quad \exists x \neg \exists y \neg ((x \leq y) \vee (y \leq x)) \quad \doteq \quad \exists x \forall y \neg (x \parallel y)$$

gilt für den linken Graphen, aber nicht für den rechten!

k-**Variableneigenschaft logischer Theorien**

Sei $\Theta \subset \mathrm{FO}[\leq]$ eine Menge logischer Eigenschaften.
Die Menge der Modelle von Θ ist dann:

$$[\![\Theta]\!] \quad = \quad \{p \in PO \mid \ \forall L \in \Theta : \ p \in L\} \quad = \quad \bigcap_{L \in \Theta} L$$

Sei $\mathfrak{F}$ ein logisches Fragment.
Wir definieren das entsprechende Fragment für Modelle von Θ als:

$$\mathfrak{F} \cdot [\![\Theta]\!] \quad = \quad \{L \cap [\![\Theta]\!] \mid \ L \in \mathfrak{F}\}$$

Für $k \in \mathbb{N}$ sagen wir «Θ erfüllt die k-Variableneigenschaft» gdw:

$$\mathrm{FO}[\leq] \cdot [\![\Theta]\!] \quad = \quad \mathrm{FO}_k[\leq] \cdot [\![\Theta]\!]$$

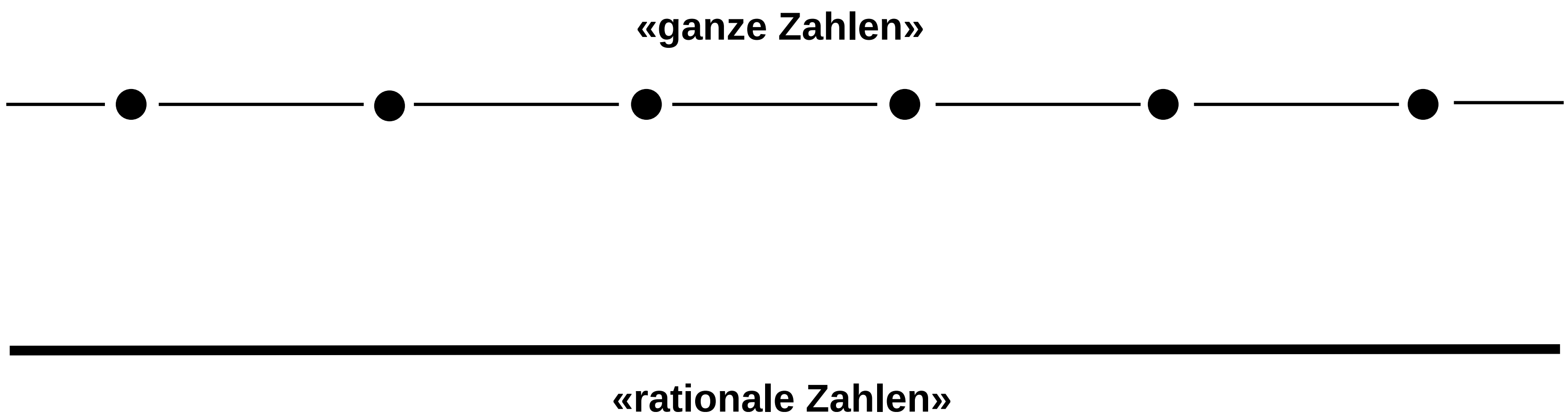
Lemma. Sei $k \in \mathbb{N}$. Die folgenden Aussagen sind gleichbedeutend:

a) für alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \geq k$ ist $\mathrm{FO}_{(m,n)}[\leq] \cdot [\![\Theta]\!] = \mathrm{FO}_{(k,n)}[\leq] \cdot [\![\Theta]\!]$.

b) für alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \geq k$ gilt: hat Duplicator im EF-Spiel mit k Marken auf den Θ-Modellen p und q eine Gewinnstrategie für n Runden, dann hat er auf p und q auch mit m Marken eine Gewinnstrategie für n Runden.

linear geordnete Mengen $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$

Das Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiel mit 3 Marken soll auf den Partialordnungen $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ gespielt werden.



Jede ganze Zahl hat einen eindeutigen Nachfolger:

$$\neg\exists x\,\neg\exists y\,((x < y) \;\wedge\; \neg\exists z\,((x < z) \;\wedge\; (z < y)))$$

Diese $\mathrm{FO}_3[\leq]$-Eigenschaft gilt für die rationalen Zahlen nicht.
Daraus ergibt sich unmittelbar eine Gewinnstrategie für Spoiler.

lineare Ordnungen im allgemeinen

Eine Partialordnung ist linear gdw. sie die Formel

$$\varphi_{LO} \quad = \quad \forall x \, \forall y \, ((x \leq y) \, \vee \, (y \leq x))$$

erfüllt. Die *Theorie linearer Ordnungen* ist gegeben durch:

$$\mathrm{LO} \quad = \quad \{\, L(\varphi_{LO}) \,\} \quad \subset \quad \mathsf{FO}[\leq]$$

Satz (Kamp & Stavi).

Die Theorie linearer Ordnungen erfüllt die 3-Variableneigenschaft.

Denn für beliebige $m, n \in \mathbb{N}$ gilt:
Hat Duplicator über den linearen Ordnungen $p, q \in [\![\mathrm{LO}]\!]$ eine Gewinnstrategie für n Runden im Spiel mit *drei* Marken, dann hat er mit m Marken eine Gewinnstrategie über p und q für n Runden.

ein temporales Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiel

Seien $p_0 = (V_0, \leq, \lambda)$ und $p_1 = (V_1, \leq, \lambda)$ Partialordnungen.
Wir erweitern sie um nicht beschriftete minimale Elemente $\perp_i$ zu

$$(p^\perp)_i \;=\; (V_i \cup \perp_i,\; \leq,\; \lambda): \qquad \perp_i \;\leq\; v \qquad \forall v \in V_i \;\; \forall i \in \{0,1\}$$

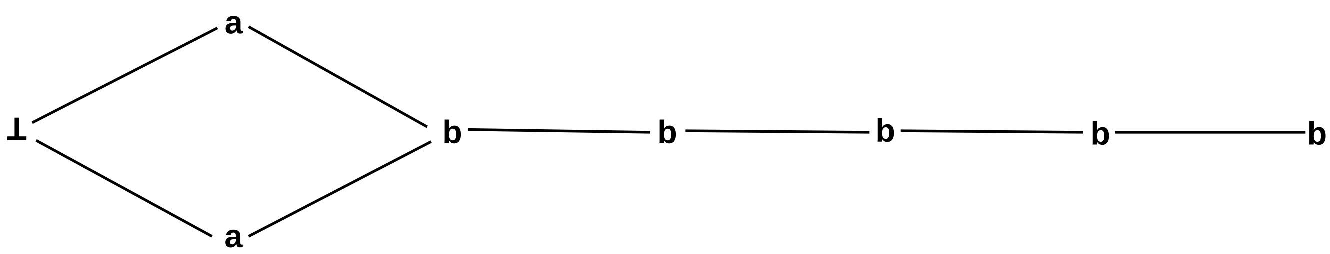
Im *temporalen Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiel* auf den Partialordnungen p_0 und p_1 mit $n \in \mathbb{N}$ Runden gibt es für jede dieser erweiterten Strukturen $(p^\perp)_0$ und $(p^\perp)_1$ eine Marke. Ablauf einer Runde:

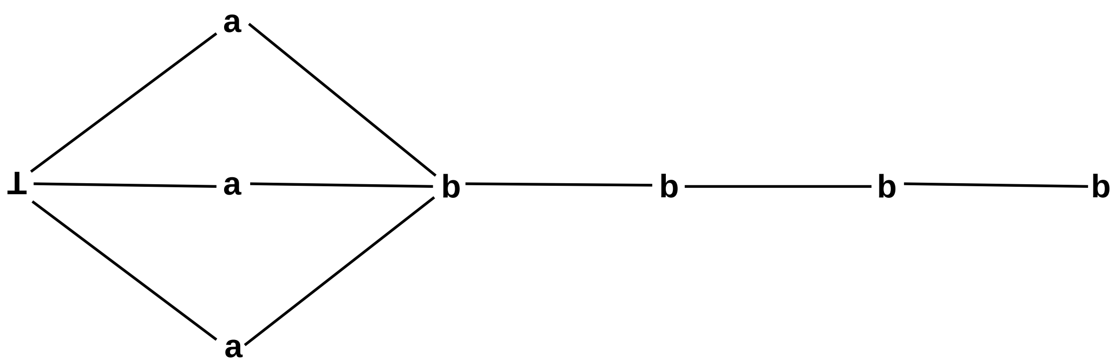
1. Spoiler wählt eine Seite $s \in \{0,1\}$. Er bewegt die auf $(p^\perp)_s$ liegende Marke.

2. Duplicator bewegt die auf $(p^\perp)_{1-s}$ liegende Marke *in die gleiche Richtung* wie Spoiler, also auch nach links, nach rechts bzw. parallel.

Spoiler gewinnt, wenn Duplicator nicht ziehen kann oder Marken auf verschieden beschrifteten Knoten liegen. Anfangs liegen die Marken auf $\perp_0$ und $\perp_1$.

Beispiel





Duplicator gewinnt gdw. weniger als fünf Runden gespielt werden.

Welche Komplexitätsklassen entsprechen diesem Spiel?

Seien $p = (V_p, \leq, \lambda)$ und $q = (V_q, \leq, \lambda)$ Partialordnungen. Notation:

$$(p, u) \quad \dot{\sim}_{(n)} \quad (q, v)$$

bedeutet, dass Duplicator im temporalen EF-Spiel mit $n \in \mathbb{N}$ Runden auf p und q eine Gewinnstrategie hat, wenn die Marken gerade auf $u \in V_p$ und $v \in V_q$ liegen.

Satz. Die folgenden Aussagen sind gleichbedeutend:

a) Es gibt eine Formel φ mit zwei Variablen und $qt(\varphi) \leq n \in \mathbb{N}$, die von p erfüllt wird, aber nicht von q.

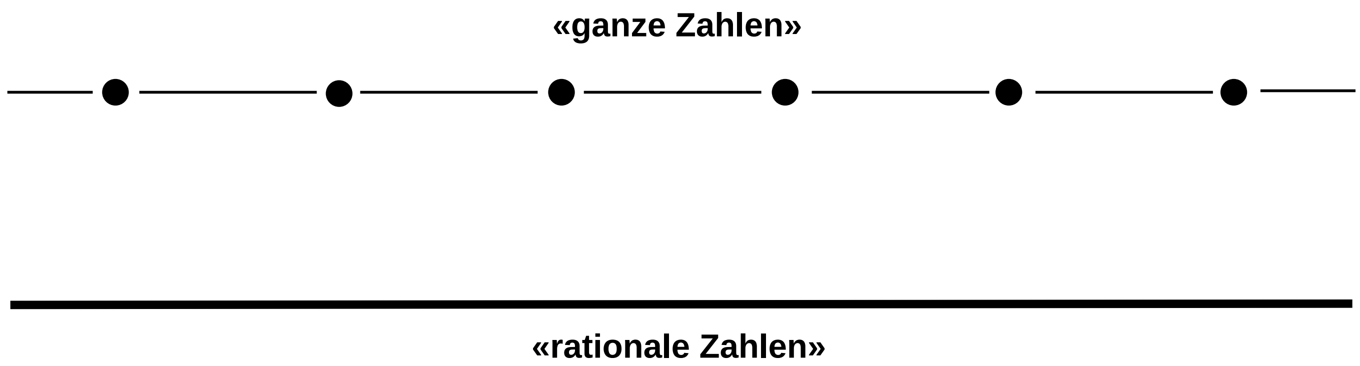
b) Spoiler hat eine Gewinnstrategie im temporalen Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiel mit n Runden auf den Partialordnungen p und q.

andere Formulierung.
Für alle Partialordnungen p und q gilt mit $n \in \mathbb{N}$:

$$p \ \dot{\sim}_{(n)} \ q \quad \Longleftrightarrow \quad p \ \sim_{(2,n)} \ q$$

lineare Ordnungen und Formeln mit zwei Variablen

Das Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiel mit 2 Marken oder das temporallogische EF-Spiel soll jetzt unendlich viele Runden lang laufen:



Fazit:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \equiv_{(2,\infty)} & \mathbb{Q} \\ \mathbb{Z} & \not\equiv_{(3,\infty)} & \mathbb{Q} \end{array}$$

Die Theorie linearer Ordnungen erfüllt die 3-Variableneigenschaft, aber nicht die 2-Variableneigenschaft.